GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ 2024 - 2030

SEV SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ

SEMSyS SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR

TEBAEV Telebachillerato de Veracruz

Dirección General de Telebachillerato

Basado en la NEM

Pensamiento matemático III

Gonzalo Jácome Cortés
José Miguel Hernández Martínez
Luis Enrique Escobar Orea
Constantino Allende García
Israel Morales Reyes
Zaira Zulema Sánchez Hernández

GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ

Norma Rocío Nahle García
Gobernadora del Estado de Veracruz

Claudia Tello Espinosa
Secretaria de Educación de Veracruz

David Agustín Jiménez Rojas
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Dirección General de Telebachillerato

Director General
Irving Ilhuicamina Mendoza Ruiz

Subdirectora Técnica
Piedad Alcira Hernández Pérez

Jefe del Departamento Técnico Pedagógico
Noel Abraham Velázquez Viveros

Jefa de la Oficina de Planeación Educativa
Ana Flora Angulo Morales

Equipo editorial

Coordinación editorial
Joaquin Vasquez Pérez

Asesoría académica
Gonzalo Jácome Cortés

Asesoría pedagógica
Norma Angélica Basurto Murrieta

Corrección y estilo
Bertha Isabel Álvarez Vera

Diseño editorial
Greisy del Carmen Ramos de la Cruz

Formación
Greisy del Carmen Ramos de la Cruz
Óscar Méndez Huitrón
Juan Luis Uscanga Salazar

Portada
Jorge Octavio Limón Hernández

Selección de imágenes
Gonzalo Jácome Cortés
José Miguel Hernández Martínez
Luis Enrique Escobar Orea
Constantino Allende García
Israel Morales Reyes
Zaira Zulema Sánchez Hernández

Pensamiento matemático III

Primera edición: 2024
Primera reimpresión: 2025
ISBN 978-607-725-505-5

Km 4.5 Carretera federal Xalapa-Veracruz
Col. SAHOP, C.P. 91090, Xalapa, Veracruz
Telebachillerato de Veracruz

Impreso en México

Módulo 1

Pensamiento Variacional

Metas de aprendizaje

- M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
- M3 Aplica procedimientos, técnicas y lenguaje matemático para la solución de problemas propios del Pensamiento Matemático, de Áreas de Conocimiento, Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y de su entorno.M2 Socializa con sus pares sus conjeturas, descubrimientos o procesos en la solución de un problema tanto teórico como de su entorno.
- M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.

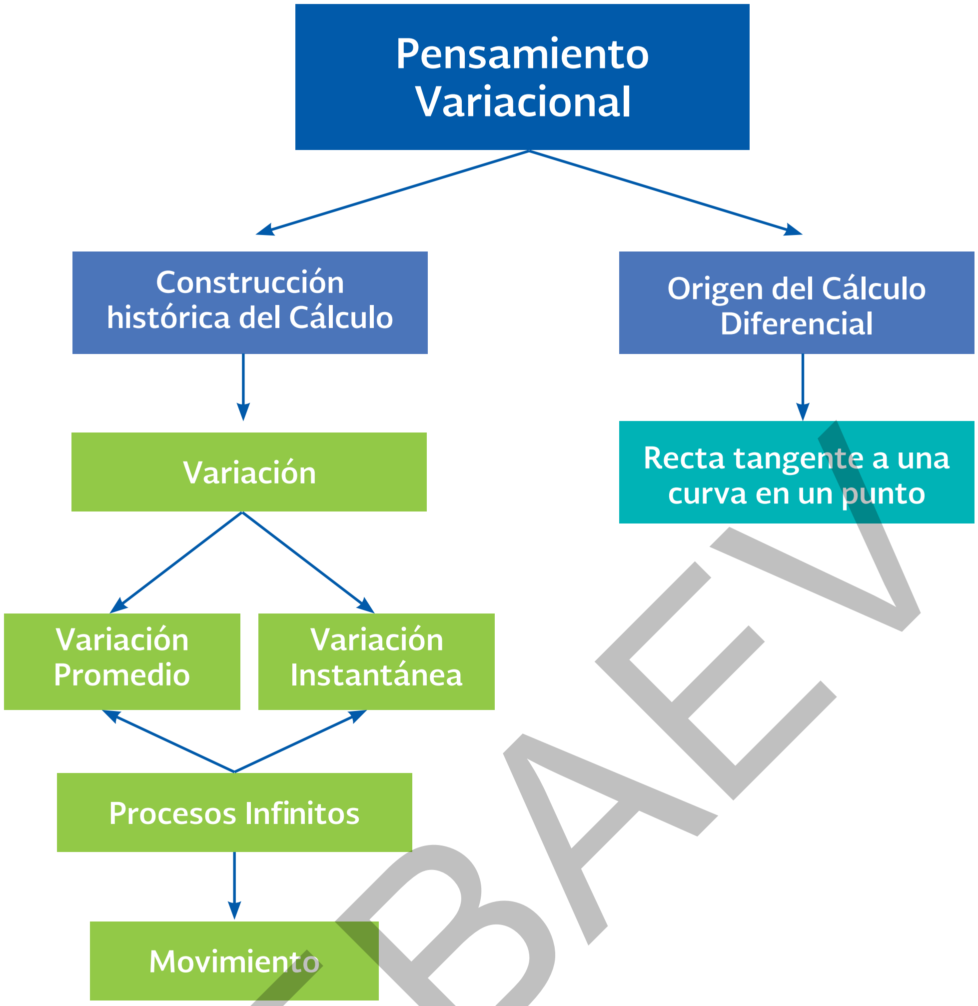
Progresiones de aprendizaje

1. Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

2. Analiza de manera intuitiva algunos de los problemas que dieron origen al cálculo diferencial, en particular el problema de determinar la recta tangente a una curva en un punto dado.

Relación del módulo con los Recursos Sociocognitivos, Recursos Socioemocionales y Ámbitos de Formación Socioemocional del Marco Curricular Común para la Educación Media Superior (MCCEMS) 2023.

Recursos sociocognitivos	Recursos socioemocionales	Ambitos de formación socioemocional
Lengua y comunicación Pensamiento matemático Conciencia histórica Cultura digital	Responsabilidad social	Práctica y colaboración ciudadana
	Cuidado físico y corporal	Educación para la salud
		Actividades físicas y deportivas
	Bienestar emocional afectivo	Educación integral en sexualidad y género
		Actividades artísticas y culturales



Introducción

En este módulo analizaremos el contexto histórico del cálculo, como surgió y quienes fueron sus máximos representantes, estudiaremos los distintos fenómenos que acontecen a nuestro alrededor, y a partir de estos abstraer los escenarios matemáticos que subyacen en ellos, de esta manera lograremos entender las problemáticas, describirlas, modelarlas y resolverlas de tal forma que podamos predecir algunas de sus consecuencias ya sean positivas o negativas, de forma personal o para la sociedad.

Para lograr esto nos apoyaremos en el **pensamiento variacional** el cual se considera uno de los pilares del pensamiento matemático, específicamente hablaremos de la variación instantánea y promedio las cuales nos dan paso a los procesos infinitos que son los que dieron origen a esta rama de la matemática.

Exploro mis saberes

Contesta las siguientes preguntas.

1. ¿Qué entiendes por variación?
2. ¿Qué significa promedio?
3. ¿Qué significa instantáneo?
4. ¿Qué es una razón?
5. ¿Qué es la velocidad?
6. Resuelve lo siguiente. Un pequeño productor de café asiste a un pueblo a vender su café cereza, se gasta \$100 de gasolina en el viaje y vende su producto a \$8 el kilo.

a. Mediante la modelación matemática escribe la función que representa dicha situación.

a. Obtén la gráfica de la función.

a. ¿A partir de cuantos kilos de café vendidos el productor obtendrá una ganancia?

Construye tu proyecto transversal

Para este proyecto transversal se elaborarán una serie de actividades las cuales se muestran en los siguientes incisos, se ejecutarán conforme se vaya avanzando y se expondrán al docente y al grupo al terminar el módulo.

Elabora una línea de tiempo de los personajes matemáticos que intervinieron en la construcción del cálculo y qué ideas aportaron.

Escribe 3 situaciones reales donde exista el cambio y describe cuáles son sus elementos y como varían.

Elabora un mapa mental de cuáles son los usos más importantes que se le dan al cálculo en la actualidad.

Estas actividades serán evaluadas, por lo que te sugerimos revisar la rúbrica que aparece al final del módulo.

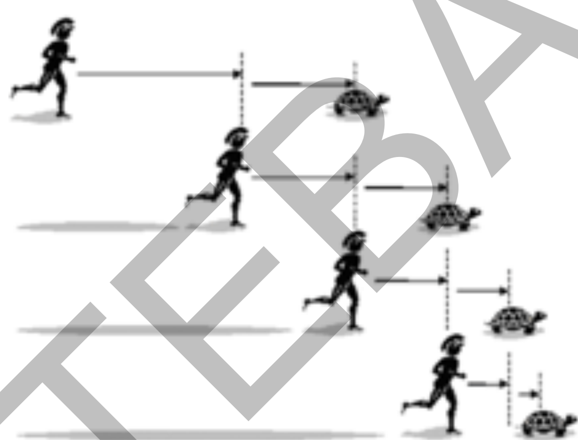
Progresiones de Aprendizaje

Genera intuición sobre conceptos como variación promedio, variación instantánea, procesos infinitos y movimiento a través de la revisión de las contribuciones que desde la filosofía y la matemática hicieron algunas y algunos personajes históricos en la construcción de ideas centrales para el origen del cálculo.

Construcción histórica del cálculo

En la antigua Grecia hacia el siglo III a.C. algunos de los grandes pensadores como Zenón de Elea hicieron observaciones en fenómenos cotidianos como el movimiento, el cual intentaron describir, pero se dieron cuenta que era complejo por ciertas características que actúan en él, estas son el espacio y el tiempo, que ahora sabemos matemáticamente se pueden dividir de forma infinita.

Y es precisamente una de sus famosas paradojas la que nos lleva a la reflexión sobre la siguiente situación, en ella, el famoso héroe griego Aquiles, un corredor muy rápido, compite en una carrera contra la tortuga que es el animal más lento, convencido de que él ganaría, le da una ventaja inicial a la tortuga, cuando empieza la carrera ambos competidores realizan el recorrido hacia la meta, pero cuando Aquiles llega al punto donde la tortuga inició, ésta ya le ha aventajado hasta otro punto, nuevamente cuando el hombre llega al lugar donde el reptil acaba de pasar, este ya avanzó hacia un distinto sitio, si se continúa con este razonamiento Aquiles jamás alcanzará a la tortuga, claro que en la realidad si lo llevamos a cabo, alcanzaríamos y rebasaríamos a la tortuga pero teóricamente en la situación que nos plantea Zenón pasa exactamente lo contrario.



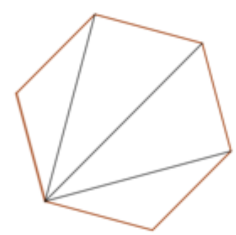


Figura 1.3
Polígono dividido en triángulos a partir de un vértice

Uno de los grandes aportes de los griegos a la matemática, que también originó pensamientos sobre lo que ahora conocemos como cálculo, fueron las áreas de los polígonos, ellos descubrieron que al dividirlos en triángulos podrían calcular la superficie de estos.

Pero si se trataba de un círculo, ¿cómo se encontraría esta área si no tene mos vértices en los cuales trazar los triángulos?, así que realizaron un método exhaustivo donde inscribían un polígono de muchos lados dentro del círculo y así calculaban un área que se acercaba bastante a la superficie de este.

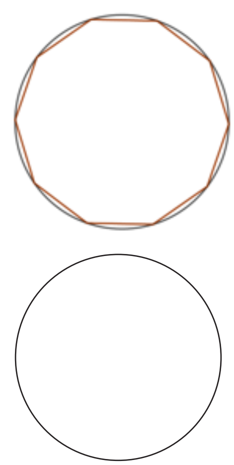
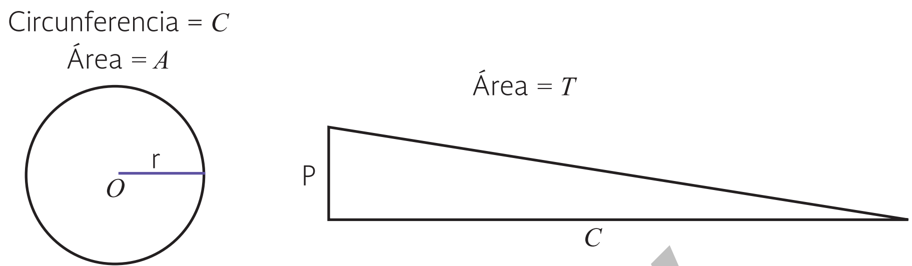


Figura 1.4
Polígono.

En efecto, el matemático Arquímedes, entre muchas otras cosas, estableció que: no importando el tamaño de un círculo, el cociente de la longitud de su perímetro entre la longitud del diámetro, es siempre el mismo. Ese cociente, a la larga se denominó como p (Pi). Otro resultado de Arquímedes, que es el que nos ocupa para introducción al cálculo infinitesimal, es la proposición 1 de su tratado “Sobre la medida del círculo”, donde menciona que: “El área de cualquier círculo es igual a la de un triángulo rectángulo, en el cual, uno de sus catetos es igual al radio y el otro al perímetro del círculo, es decir, a la circunferencia”.



En términos actuales quedaría:

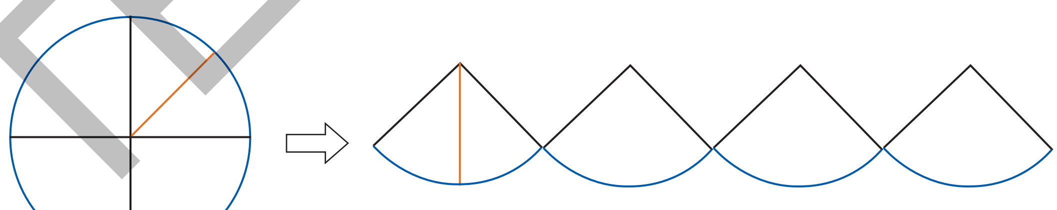
$$A_{círculo} = A_{triángulo}$$
$$= \frac{(base)(altura)}{2}$$
$$= \frac{(C)(r)}{2}$$

Dado que $C = \pi d = 2\pi r$

$$A_{circulo} = \frac{2\pi r \cdot r}{2}$$
$$= \pi r^2$$

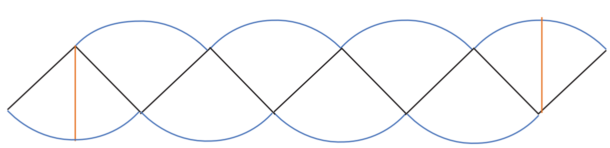
Pero ¿cómo llegó a este resultado?

Arquímedes cortó el círculo en cuatro partes iguales, así la figura resultante tiene la misma área que el círculo original:



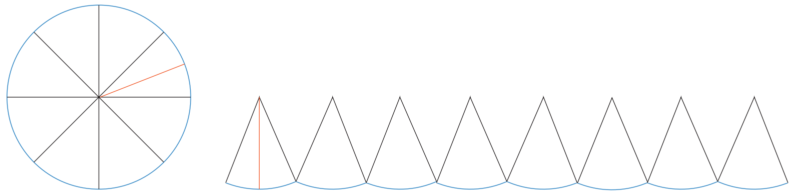
$$A_{círculo} = A_{figura}$$

Duplicó la figura resultante y la dispuso de la siguiente forma observando que el área de la figura es el doble del área del círculo:



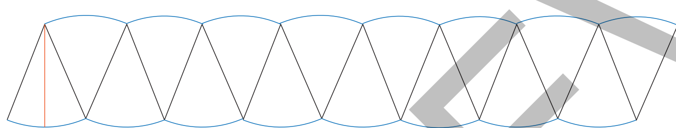
$$2A_{círculo} = A_{figura}$$

Después de esto, pensó: ¿que pasaría si el círculo original, en lugar de dividirlo en 4 partes, lo dividiera en 8 partes iguales? Observó que la figura resultante tendría la misma área que el círculo original:



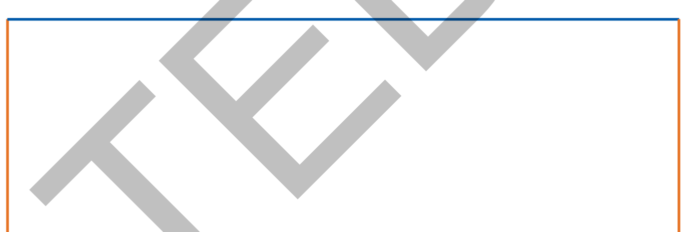
$$A_{círculo} = A_{figura}$$

Nuevamente duplicó la figura resultante. De esta forma obtiene una nueva figura que sigue teniendo el doble del área del círculo, pero cada vez se parece más a un paralelogramo:



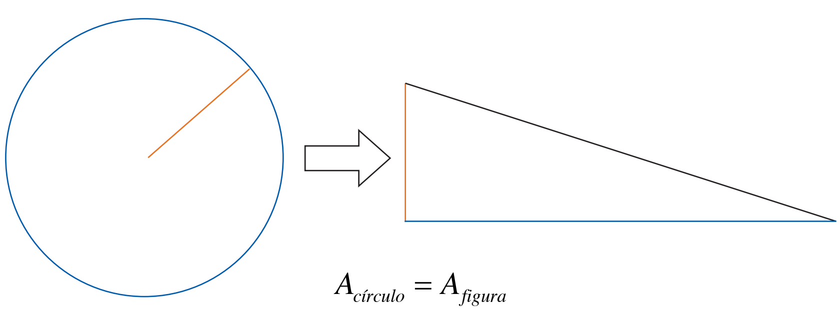
$$2A_{círculo} = A_{figura}$$

De este modo, Arquímedes reflexionó sobre lo que pasaría si dividiera cada vez más el círculo (en 16, 32, 64, 128 partes...), llegando a la conclusión de que llegaría un momento en el que los segmentos de círculo serán tan pequeños que la figura resultante seguirá teniendo la misma área del círculo y al duplicarla obtendría un rectángulo de base C (perímetro del círculo, es decir, circunferencia) y altura r (radio):



$$2A_{círculo} = A_{figura}$$

De esta forma, el área del círculo sería igual a el área del triángulo con base C y altura r:



$$A_{círculo} = A_{figura}$$

Figura 1.6
Newton y la manzana.

Figura 1.7
Peste Bubónica, Londres 1665

Sin saberlo, Arquímedes ocupó nociones de límite y de cálculo infinitesimal. El reflexionar sobre lo que es infinitamente pequeño o lo infinitamente cercano sentó las bases de una matemática más sofisticada.
No fue sino hasta el siglo XVI que matemáticos como René Descartes, Pierre de Fermat y otros, quienes retoman cuestionamientos de los griegos y, trabajando sobre ellos, se aproximan cada vez más a la construcción del cálculo. Es con Isaac Newton y Gottfried Wilhelm Leibniz en los siglos XVII y XVIII quienes desarrollarían sus trabajos y conceptos de forma independiente para poder describir objetos que se mueven en un espacio o que su velocidad es variable, el tiempo del desplazamiento, la trayectoria, creando así el cálculo.
Como se mencionó anteriormente, Fermat inicio todo, pero fue Newton quien en su afán de resolver problemas de física relacionados con los cuerpos celestes desarrolló aún más esta área, inicialmente él pensó que un objeto que cae aumenta su velocidad a cada momento hasta que este toque el suelo, pero también pensó en cual sería esta velocidad en cada instante de su trayectoria; es decir, posición y velocidad, función y tasa de cambio.

Es importante mencionar que es Newton quien desarrolla la mayor parte del cálculo, pero es la nomenclatura de Leibniz la que utilizamos en la actualidad para desarrollar y resolver los problemas.

La historia de sir Isaac Newton es realmente interesante ya que gran parte de sus aportaciones a las leyes de la gravitación universal y al cálculo infinitesimal las desarrolló en el "Annus Mirabilis" o año milagroso como lo catalogan grandes personajes del pensamiento matemático; se le nombra así a un evento que comenzó como algo que nos resultará familiar y no muy grato: una pandemia.

Era el año de 1665 y 1666 cuando en la ciudad de Londres se suscitó una pandemia de peste bubónica conocida como la "peste de Londres", en ese entonces el joven Newton estudiaba en esa capital en la universidad de Cambridge; cuando la casa de estudio decidió cerrar sus puertas ante tal contingencia, Newton, aislado en su hogar a las afueras de la ciudad y en medio de un acontecimiento realmente lamentable, pues murieron cerca de cien mil personas, logra uno de los más grandes avances en la matemática que siglos después sería aplicado en diversas ciencias.

En la actualidad, el cálculo da sustento a innumerables aplicaciones en las ciencias, tecnología, economía, etcétera, como menciona Earl Swokowski, algunos de sus usos son los siguientes: encontrar el centro de masa o el momento de inercia de un sólido, determinar el trabajo requerido para enviar una nave al espacio, calcular el flujo sanguíneo a través de una arteria, entre muchas otras.

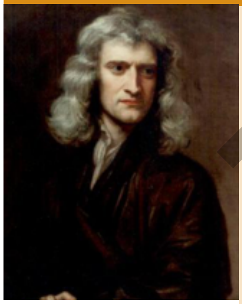
Toma en cuenta que...

La velocidad es la relación que se establece entre el espacio o la distancia que recorre un objeto y el tiempo que invierte en ello.
Una función es una regla de correspondencia entre dos conjuntos de tal manera que a cada elemento del primer conjunto le corresponde uno y sólo un elemento del segundo conjunto.
Nomenclatura es la terminología que utiliza símbolos y nombres para designar elementos y conceptos en las ciencias y en las humanidades. Ejemplo; en el lenguaje simbólico que se utiliza en las matemáticas nos permite representar conceptos, operaciones, fórmulas y expresiones con valor propio.
La peste bubónica en una enfermedad que causa hinchazón de los ganglios linfáticos, pequeños filtros en forma de frijol en el sistema inmunitario. A un ganglio linfático hinchado se le llama un bubón de ahí a palabra "bubónica" hace referencia a esta característica de la enfermedad.
Inercia es la propiedad de los cuerpos de mantener su estado de reposo o movimiento si no es por la acción de una fuerza.

Apliquemos lo aprendido

Elabora una línea de tiempo de los personajes matemáticos que intervinieron en la construcción del cálculo y que ideas aportaron.

Sir Issac Newton.



Isaac Newton nació el 25 de diciembre de 1642, en Woolsthorpe, Lincolnshire, Inglaterra, es el más grande de los astrónomos ingleses; se destacó también como gran físico y matemático. Fue en realidad un genio al cual debemos el descubrimiento de la ley de gravitación universal, que es una de las piedras angulares de la ciencia moderna. Fue uno de los inventores del cálculo diferencial e integral. Estableció las leyes de la mecánica clásica, y partiendo de la ley de gravitación universal dedujo las leyes de Kepler en forma más general. Logró construir el primer telescopio de reflexión..

Gottfried Wilhelm Von Leibniz

IEl filósofo y matemático Gottfried Wilhelm V on Leibniz nació en Leipzig, Alemania el 21 de junio de 1646. Fue también científico, ideolingüista, diplomático, jurista, historiador y bibliotecario.
Fue uno de los grandes pensadores del siglo XVII y XVIII. A él se debe el término "función" (acuñado en 1694), que utilizó para individualizar una cantidad cuya variación está dada por una curva. Leibniz también

está considerado, junto a Isaac Newton como uno de los más grandes contribuyentes al desarrollo del cálculo infinitesimal moderno y el sistema binario. Dotado de una notable inteligencia, ya a los 9 años había aprendido latín, leyendo a Tito Livio. A los 15 años entró en la Universidad de Leipzig, obteniendo un título en Filosofía a los 17 y el Doctorado en Leyes a los 20.

Toma en cuenta que...

La letra griega delta Δ significa incremento, con esta nos podremos referir al aumento que existe en una variable.

Una razón matemática son dos números que se comparan entre sí, el valor del primer número se divide entre el segundo número.

Variación

Existen situaciones en donde se da el cambio y comienzan a variar algunas condiciones, un ejemplo de esto sería ver cuánto ha crecido una mata de café semanas después de que se plantó, o si fuese un árbol maderable cuanto tiempo tardaría éste en tener un diámetro óptimo para cortarlo.

Variación Promedio

La variación promedio de una función es el cambio que se da en las coordenadas "y" de una función dividido entre el cambio de las coordenadas en "x".

Para un intervalo $a \leq x \leq b$

Dicha variación está dada por la fórmula $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Gráficamente lo podemos observar como la recta secante que corta a la función en dos puntos:

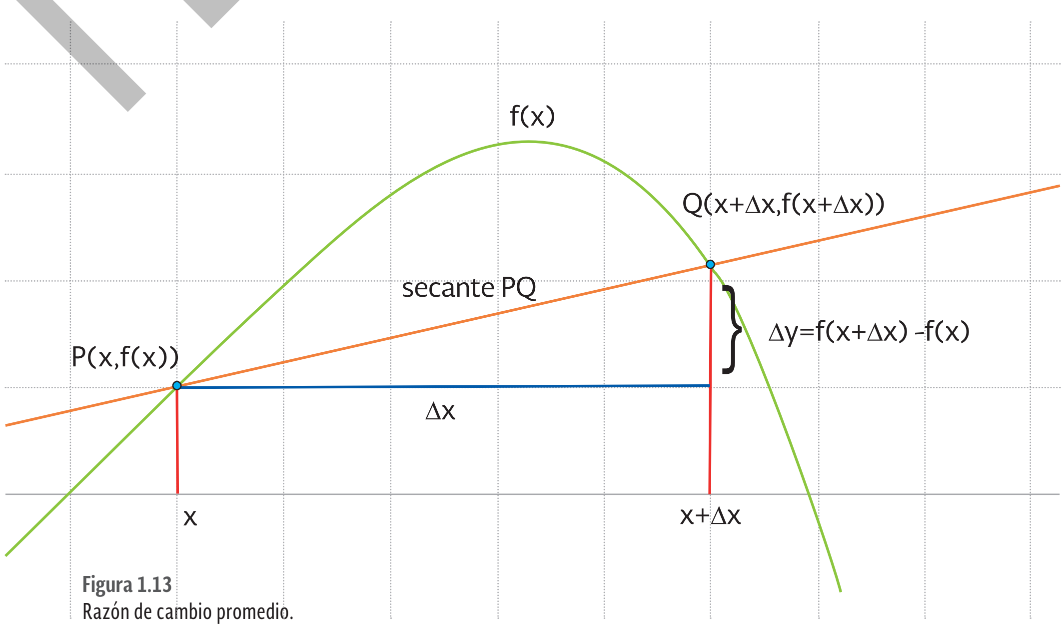


Figura 1.13
Razón de cambio promedio.

donde la razón de cambio está dada por, $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ si consideramos que esta es la razón de cambio, entonces el promedio de cada una de estas estaría dado por:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

por lo cual recibe el nombre de razón de cambio promedio o variación promedio.

Regresando con la formula $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ realicemos el siguiente ejercicio.

Se desea conocer cuál es la variación promedio a función: $f(x) = x^4 - x^2$

Para el intervalo $-1 \leq x \leq 2$

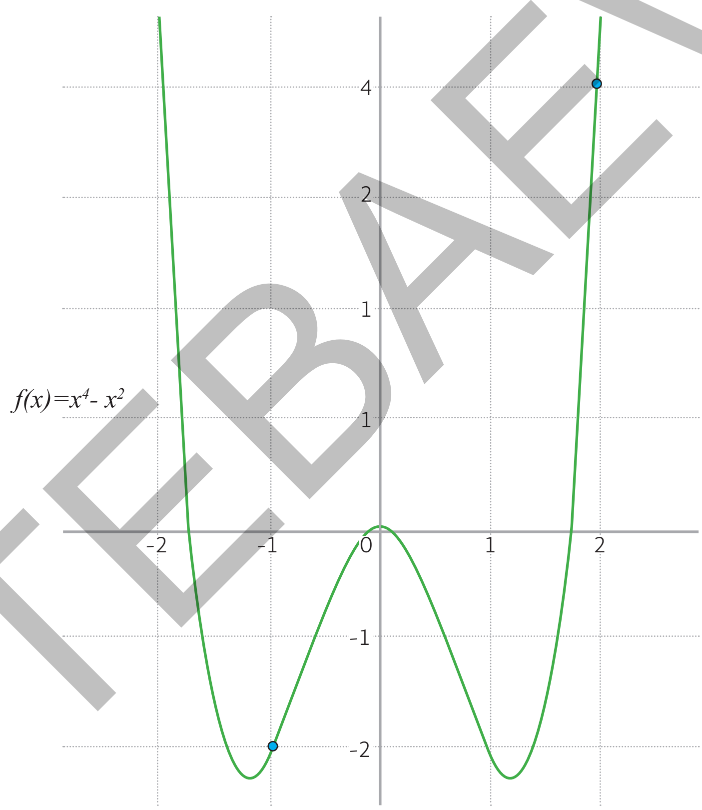


Figura 1.14
Función

Podemos observar que para $f(-1) = -2$ y para $f(2) = 4$ por lo que la variación prome-dio seria:

Variación Promedio= $$\frac{f(-1)-f(2)}{2-(-1)} = \frac{-2-4}{2-(-1)} = \frac{-6}{3} = -2$$

Apliquemos lo aprendido

Escribe 3 situaciones reales donde exista el cambio y describe cuáles son sus elementos y como varían.

Variación Instantánea

Hace algunos años existían las cámaras instantáneas, las cuales en el momento en que tomabas la fotografía la revelaba en un papel especial dentro de ella, de manera análoga podemos concebir el tomar una "fotografía instantánea" a un punto de la función y saber cuál es su razón en ese momento, a esto se le conoce como razón de cambio instantáneo o variación instantánea.

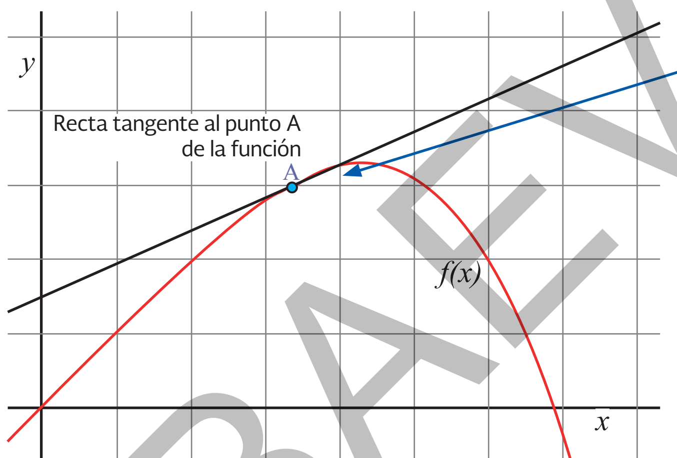


Figura 1.15
Recta tangente a un punto de una función.

Dicho de otra forma, la variación instantánea de una función nos expresa cuanto varía esta función en el punto dado, es decir, cuál es su crecimiento.

Anteriormente observamos con la variación promedio que al realizar los cálculos obteníamos la razón que existía en la recta secante comprendida en el intervalo dado, ahora podemos observar que entre más se acerque el punto B al punto A, la recta que primeramente era secante se acerca a convertirse **tangente** a ese punto.

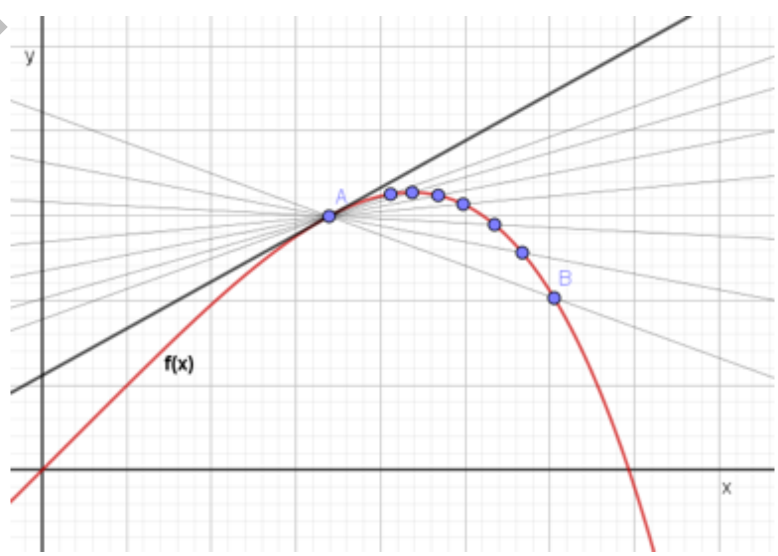


Figura 1.15
Recta tangente a un punto de una función.

Procesos Infinitos

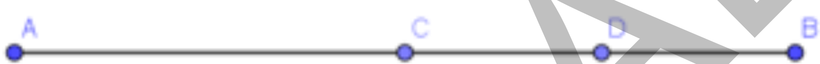
Para comprender el significado de lo que es un proceso infinito debemos comenzar por saber lo que es un proceso iterativo.

El proceso iterativo se da cuando dada una situación se aplica una transformación que vuelve la situación original en una nueva.

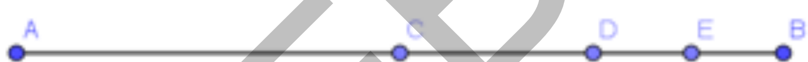
Dado lo anterior supongamos que podemos seguir aplicando la transformación a la situación de forma continua de tal forma que siempre se pueda aplicar una más y así sucesivamente de manera infinita, a esto se le conoce como proceso infinito, como cuando Aquiles quería alcanzar a la tortuga, veamos esto de manera más detenida.

Fernando y Michelle compiten en una carrera en una pista recta, como Fernando es el doble de veloz que Michelle, le permite salir de manera anticipada entre el punto A que es la salida y el punto B que es la meta.

Cuando Fernando llegue al punto C, Michelle abra avanzado al punto D.



Cuando Fernando llegue al punto D Michelle abra avanzado al punto E.



Si continuamos de esta forma surgirá la interrogante de ¿En qué momento alcanzará Fernando a Michelle? Situaciones como esta dan paso a los procesos infinitos.

Movimiento

El movimiento lo podríamos definir como el cambio de posición de un cuerpo respecto al tiempo, así como en el caso de las paradojas de Zenón y los procesos infinitos el tiempo que transcurre al movimiento de los objetos es muy importante.
Dado que las ideas matemáticas de Newton inicialmente fueron para resolver problemas físicos, en la actualidad logran explicar muchos fenómenos de la naturaleza como el movimiento de las nubes, corrientes oceánicas u otros elaborados por el hombre como órbitas de los satélites artificiales, el crecimiento económico o el diseño de vehículos.

Apliquemos lo aprendido

Elabora un mapa mental de cuáles son los usos más importantes que se le dan al cálculo en la actualidad.

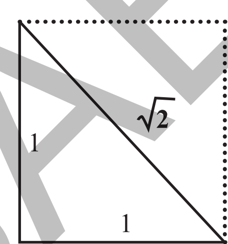
Origen del cálculo diferencial

Desde los inicios de la humanidad el hombre en su afán de poder contabilizar las situaciones a su alrededor tales como el número de integrantes de su tribu, semillas, animales domésticos comenzó el desarrollo de las matemáticas.

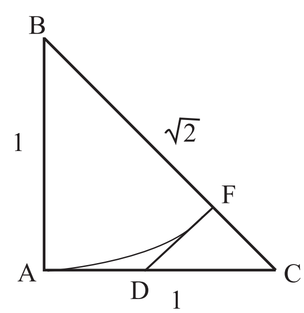
Específicamente, algunos problemas dieron inicio a lo que hoy llamamos cálculo diferencial.

Empezamos mencionando de manera general, el problema al reconocer magnitudes "tan pequeñas como se quiera". En este sentido, los griegos, y en especial, los pitagóricos, tuvieron un problema existencial sobre esta situación, ya que ellos tenían la idea de que dos magnitudes o segmentos siempre son conmensurables, es decir, afirmaban que existía un submúltiplo de ambos que puede tomarse como unidad para medir dichos segmentos. Partiendo de esta afirmación, cimentaron su filosofía de que los números enteros y los números racionales eran la esencia del universo.

Sin embargo, al analizar una figura geométrica básica, como el cuadrado, se percataron que hay un segmento, la diagonal, que no es conmensurable con el lado, es decir, no existe un submúltiplo entre el lado de un cuadrado y su diagonal, que pueda tomarse como unidad para medir ambos segmentos.



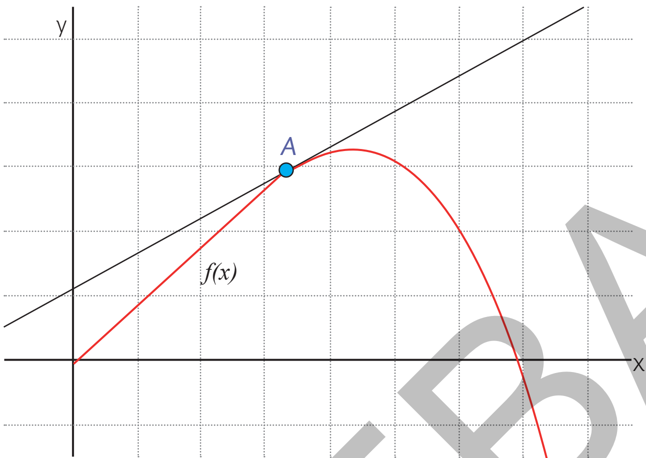
Al percatarse que existían cantidades no conmensurables, es decir, inconmensurables, los pitagóricos optaron por ocultar dicho descubrimiento, ya que contradecía sus bases matemáticas. La demostración geométrica de la existencia de los inconmensurables hace alusión a un proceso que puede reiterarse indefinidamente, obteniendo triángulos isósceles que pueden llegar a ser "tan pequeños como se quiera", de tal manera que se demuestra que no puede existir una unidad de longitud que mida simultáneamente el cateto y la hipotenusa del triángulo formado, concluyendo que dichos segmentos no son conmensurables.



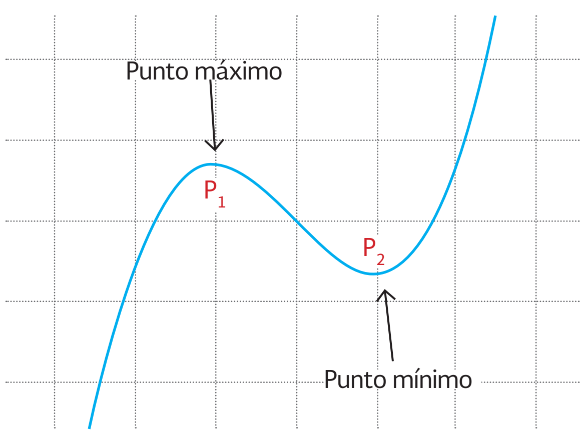
De esta misma forma, al querer conocer la relación entre la circunferencia y su diámetro, o la relación entre la diagonal de un pentágono regular y su lado, entre otros, se hace referencia a razonamientos teóricos sobre lo infinitamente pequeño o cercano.

Sin embargo, el surgimiento del cálculo infinitesimal fue consecuencia de la unificación de tres grandes problemas que existían acumulados alrededor del siglo XVII:
El problema de las tangentes.
El problema de máximos y mínimos.
El problema de integración.

Recta tangente a una curva en un punto
El calcular la ecuación de la tangente a una curva en un punto, resultó ser un problema en aquellos tiempos, ya que era requerido, entre otras cosas, para el diseño de lentes ópticos y para conocer la dirección instantánea de un movimiento curvo. Los griegos obtuvieron geométricamente tangentes de algunas curvas, Apolonio (190 a.C.) construyó las tangentes a las cónicas; Arquímedes (287- 212 a.C.) las construyó para espirales; Descartes (1596-1650), Fermat (1601-1665) y Barrow (1630-1677) determinaron algunos métodos para calcularla, sin embargo, no existía un método general que las hallara.

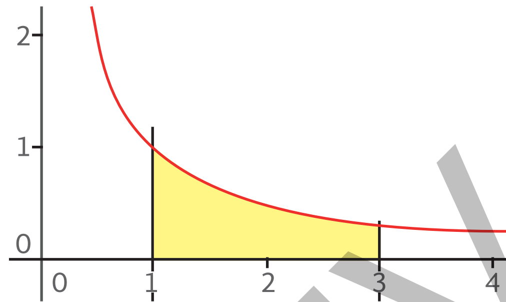


Máximos y mínimos
Otro problema de aquellos tiempos era, entre otros, el conocer el alcance máximo de un proyectil dado el ángulo de inclinación del cañón de disparo, o conocer las distancias máximas y mínimas de un planeta con respecto al Sol, es decir, conocer los máximos y mínimos de una función. En este sentido, aunque Kepler (1571-1630) trabajó con capacidades máximas de barricas de vino, su método, como el de todos sus contemporáneos, consistía en el ensayo y error.



Integración

El determinar longitudes de curvas, áreas encerradas por curvas, centroides, hallar el espacio recorrido por un móvil dada su velocidad o la atracción gravitacional, son problemas no resueltos por un método general. Por ejemplo, Arquímedes calculó áreas y volúmenes por el método exhaustivo, también llamado método de llenado; Kepler estudió el volumen de sólidos de revolución, descomponiendo los cuerpos en partes indivisibles, adecuándolos a cada problema.



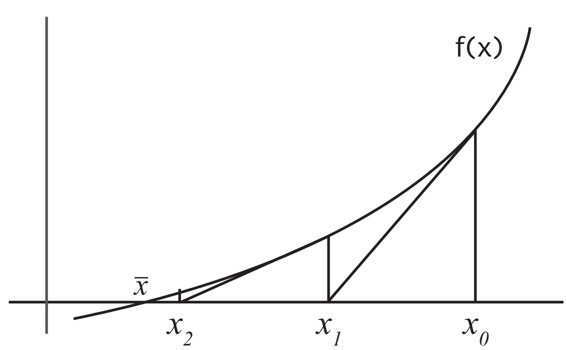
Newton y Leibnitz

Los problemas planteados anteriormente giran en torno al desarrollo del cálculo. Como se analizó, muchos de ellos tenían sus soluciones particulares y otros tantos, no tenían solución, al menos no matemáticamente. El trabajo de Newton y Leibnitz consistió fundamentalmente en elaborar un método general para atenderlos a todos.

Aunque ambos científicos son considerados los padres del cálculo infinitesimal, sus trabajos se desarrollaron de manera independiente, con diferente enfoque y objetivo cada uno.

Newton: fluxiones

El cálculo de Newton utiliza la noción de “fluxiones”: entre sus múltiples estudios, él consideraba cantidades variables que van fluyendo con el tiempo, a las cuales denominó fluentes, denotadas por x. Posteriormente introduce las razones de cambio instantáneas de las fluentes, a las que denomina fluxiones, denotadas por $\dot{x}$, que no son sino, mencionado en términos actuales, las derivadas de las fluentes con respecto al tiempo. Posteriormente Newton modificó su notación al imaginar una curva como una ecuación $f(x,y)=0$, donde x y y eran funciones del tiempo, partiendo de la imagen cinemática de curva como trayectoria de un móvil. La velocidad en cada punto tenía como componentes las velocidades $\bar{x}$ y $\bar{y}$, denominadas fluxiones.



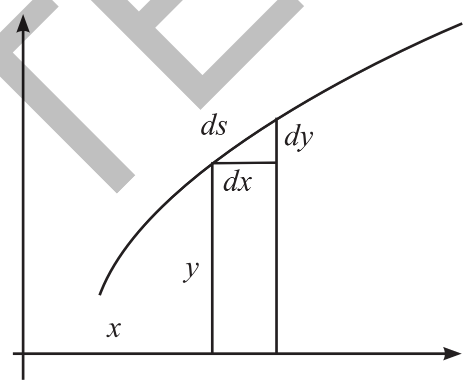
De esta manera, para hallar la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto calculaba el cociente $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$. En el caso de máximos y mínimos comentaba que “cuando la cantidad es la más grande o la más pequeña, en ese momento su fluir ni crece ni decrece”. Para el caso del problema del cálculo del área bajo la curva, Newton utilizó el proceso inverso del cálculo de fluxiones (mencionado en términos actuales, al cálculo de primitivas).

El cálculo de Leibnitz utiliza la noción de “diferencias”: no parte de ideas físicas como Newton, sino parte de ideas filosóficas, tratando de buscar un lenguaje universal que describiera de manera racional los problemas de la época, permitiendo sistematizar los métodos de solución. De hecho, la notación de Leibnitz es la que ocupamos hoy en día.

Él estudió, entre otras cosas, las progresiones aritméticas y observó como la suma de las diferencias está relacionada con los términos de la sucesión, es decir, las sucesiones de diferencias pueden sumarse fácilmente y que al formar la sucesión de diferencias y después sumarlas se obtiene la sucesión inicial, generando así el origen de su cálculo que es obtener y calcular sumas.

Leibnitz: diferencias

Leibnitz consideraba una curva como un polígono de infinitos lados, cuya longitud es infinitesimal, es decir, infinitamente pequeña. A dicha curva le asociaba una sucesión de abscisas $\chi_1, \chi_2, \chi_3,...$ y una sucesión de ordenadas $y_1, y_2, y_3, \cdots$, donde los puntos $P(x_i, y_i)$ son los vértices de la poligonal de infinitos lados que forma la curva. La diferencia entre dos valores sucesivos de x, es llamada la diferencial de x y representada por dx. Lo mismo sucede con la diferencia entre dos valores sucesivos de y llamándola diferencial de y y representándola por dy. La parte de la curva comprendida entre estos valores sucesivos fue representada por Leibnitz por dS. Esto, representado geométricamente, nos presenta el *triángulo característico de Leibnitz*:



El triángulo característico tiene como propiedades que sus lados dx, dy y dS son infinitesimales y además se cumple con la ecuación $(dS)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$. De esta manera, el lado dS coindice con la tangente de la curva en el punto $P(x, y)$, por lo que la pendiente de dicha recta tangente está dada por $\frac{dy}{dx}$, llamado por Leibniz cociente diferencial, y lo que actualmente conocemos como derivada. Observó que una tangente cero al cociente diferencial representaba que en ese punto había un máximo o un mínimo.

Leibnitz dedujo que, la suma de las ordenadas es una aproximación del área bajo la curva y que la diferencia entre dos ordenadas sucesivas (que en términos actuales se refería a la secante) es aproximadamente igual a la pendiente de la correspondiente tangente. Cuanto más pequeñas sean las diferencias, mejor serán las aproximaciones, por lo que, si la diferencia fuese infinitamente pequeña, los resultados serían exactos. También dedujo que el cálculo de cuadraturas (hoy integración) y el problema de tangentes (hoy derivación) son operaciones inversas una de la otra.

Después de Newton y Leibnitz

Con los aportes de Newton y Leibnitz, el cálculo infinitesimal tuvo un rápido desarrollo, ya que muchos matemáticos retomaron dichos trabajos, ampliando y mejorando esta rama, hasta llegar a como la conocemos actualmente. Por ejemplo, Wallis y Raphson (1648-1715) mejoraron los métodos de Newton para hallar raíces; los hermanos Bernoulli y l´H^opital generaron un libro de texto en 1696 donde se explicaba a detalle el trabajo de Leibnitz; Brook Taylor desarrolla las series de Taylor en 1715 que permite solucionar ecuaciones diferenciales; Leonard Euler (1707-1783) contribuyó a transformar la noción de cálculo de cantidades geométricas variables a lo que hoy conocemos como cálculo de funciones; Joseph Lagrange introduce en 1797 la notación $f'(x)$ para representar a la derivada de una función y le otorga a la derivada el "estatus" de función, despojándola de su naturaleza imprecisa de fluxión o de cociente diferencial; Joseph Fourier plantea en 1822 las series de Taylor donde relaciona problemas referentes al concepto de función, integrales y convergencia; a finales del siglo XIX el concepto de límite lo desarrollan Bolzano y Cauchy Weierstrass, tal y como lo conocemos actualmente mientras que también en esa época, se desarrolla la teoría de los números reales por Dedekind y Cantor.

Con esta breve reseña histórica, nos podemos percatar de que el cálculo infinitesimal fue desarrollado por muchos investigadores y matemáticos que requerían resolver problemas que en su momento tenían presentes, y fue a través de la concatenación de ideas, que se llega a presentar un pensamiento variacional como el que estudiarán en este curso.